Combinatoria II

José de Jesús Lavalle Martínez

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias de la Computación
Estructuras Discretas CCOS 009

Contenido

Motivación I

- Suponga que una bandada de 20 palomas vuela en un conjunto de 19 casilleros para posarse.

Motivación I

- Debido a que hay 20 palomas pero sólo 19 casilleros, al menos uno de estos 19 casilleros debe tener al menos dos palomas.

- Para ver por qué esto es cierto, tenga en cuenta que si cada casillero tuviera como máximo una paloma, se podrían acomodar como máximo 19 palomas, una por casillero.

Motivación I

- Esto ilustra un principio general llamado principio de casillero, que establece que si hay más palomas que casilleros, entonces debe haber al menos un casillero con al menos dos palomas en él (ver Figura 1).

Motivación I

- Este principio es extremadamente útil; se aplica a mucho más que palomas y casilleros.

Motivación II

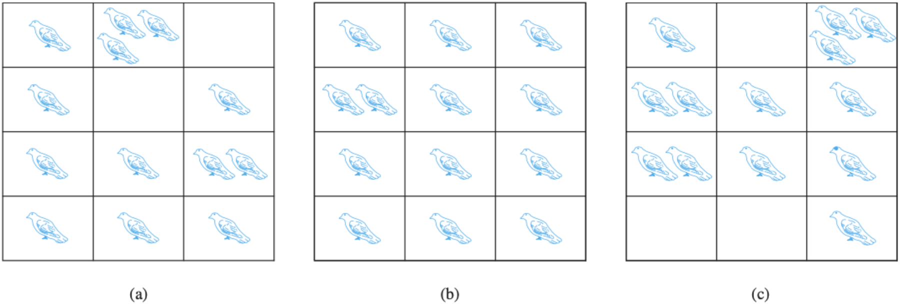

Figura 1: Hay más palomas que casilleros.

El principio del casillero I

Teorema 1

EL PRINCIPIO DEL CASILLERO Si k es un número entero positivo y $k+1$ o más objetos se colocan en k cajas, entonces hay al menos una caja que contiene dos o más de los objetos.

El principio del casillero I

Teorema 1

EL PRINCIPIO DEL CASILLERO Si k es un número entero positivo y $k+1$ o más objetos se colocan en k cajas, entonces hay al menos una caja que contiene dos o más de los objetos.

Demostración:

- Demostramos el principio del casillero usando una prueba por contraposición.

Teorema 1

EL PRINCIPIO DEL CASILLERO Si k es un número entero positivo y $k+1$ o más objetos se colocan en k cajas, entonces hay al menos una caja que contiene dos o más de los objetos.

Demostración:

- Demostramos el principio del casillero usando una prueba por contraposición.
- Suponga que ninguna de las k cajas contiene más de un objeto.

El principio del casillero I

Teorema 1

EL PRINCIPIO DEL CASILLERO Si k es un número entero positivo y $k+1$ o más objetos se colocan en k cajas, entonces hay al menos una caja que contiene dos o más de los objetos.

Demostración:

- Demostramos el principio del casillero usando una prueba por contraposición.
- Suponga que ninguna de las k cajas contiene más de un objeto.
- Entonces, el número total de objetos sería como máximo k.

Teorema 1

EL PRINCIPIO DEL CASILLERO Si k es un número entero positivo y $k+1$ o más objetos se colocan en k cajas, entonces hay al menos una caja que contiene dos o más de los objetos.

Demostración:

- Demostramos el principio del casillero usando una prueba por contraposición.
- Suponga que ninguna de las k cajas contiene más de un objeto.
- Entonces, el número total de objetos sería como máximo k.
- Esto es una contradicción, porque hay al menos $k+1$ objetos.

$\blacksquare$

El principio del casillero II

Corolario 1

Una función f de un conjunto con $k+1$ o más elementos a un conjunto con k elementos no es uno a uno.

Corolario 1

Una función f de un conjunto con $k + 1$ o más elementos a un conjunto con k elementos no es uno a uno.

Demostración:

- Suponga que para cada elemento y en el codominio de f tenemos una caja que contiene todos los elementos x del dominio de f tales que $f(x) = y$.

El principio del casillero II

Corolario 1

Una función f de un conjunto con $k+1$ o más elementos a un conjunto con k elementos no es uno a uno.

Demostración:

- Suponga que para cada elemento y en el codominio de f tenemos una caja que contiene todos los elementos x del dominio de f tales que $f(x) = y$.
- Debido a que el dominio contiene $k+1$ o más elementos y el codominio contiene solo k elementos, el principio de casillero nos dice que una de estas cajas contiene dos o más elementos x del dominio.

El principio del casillero II

Corolario 1

Una función f de un conjunto con $k+1$ o más elementos a un conjunto con k elementos no es uno a uno.

Demostración:

- Suponga que para cada elemento y en el codominio de f tenemos una caja que contiene todos los elementos x del dominio de f tales que $f(x) = y$.
- Debido a que el dominio contiene $k+1$ o más elementos y el codominio contiene solo k elementos, el principio de casillero nos dice que una de estas cajas contiene dos o más elementos x del dominio.
- Esto significa que f no puede ser uno a uno.

$\blacksquare$

Ejemplo 1

Ejemplo 1

Entre cualquier grupo de 367 personas, debe haber al menos dos con el mismo cumpleaños, porque sólo hay 366 cumpleaños posibles.

$\square$

Ejemplo 2

Ejemplo 2

En cualquier grupo de 27 palabras en inglés, debe haber al menos dos que comiencen con la misma letra, porque hay 26 letras en el alfabeto inglés. $\square$

Ejemplo 3

Ejemplo 3

¿Cuántos estudiantes debe haber en una clase para garantizar que al menos dos estudiantes reciban la misma calificación en el examen final, si el examen se califica en una escala de 0 a 100 puntos?

Ejemplo 3

Ejemplo 3

¿Cuántos estudiantes debe haber en una clase para garantizar que al menos dos estudiantes reciban la misma calificación en el examen final, si el examen se califica en una escala de 0 a 100 puntos?

Solución:

- Hay 101 posibles calificaciones en el examen final.

Ejemplo 3

¿Cuántos estudiantes debe haber en una clase para garantizar que al menos dos estudiantes reciban la misma calificación en el examen final, si el examen se califica en una escala de 0 a 100 puntos?

Solución:

- Hay 101 posibles calificaciones en el examen final.
- El principio del casillero muestra que entre 102 estudiantes debe haber al menos 2 estudiantes con la misma calificación.

$\square$

Ejemplo 4

Ejemplo 4

Demuestre que para cada entero n hay un múltiplo de n que sólo tiene 0 y 1 en su expansión decimal.

Ejemplo 4

Demuestre que para cada entero n hay un múltiplo de n que sólo tiene 0 y 1 en su expansión decimal.

Solución::

- Sea n un número entero positivo.

Ejemplo 4

Demuestre que para cada entero n hay un múltiplo de n que sólo tiene 0 y 1 en su expansión decimal.

Solución::

- Sea n un número entero positivo.
- Considere los $n + 1$ enteros $1, 11, 111, \ldots, 11\ldots1$ (donde el último entero en esta lista es el entero con $n+1$ 1s en su expansión decimal).

Ejemplo 4

Ejemplo 4

Demuestre que para cada entero n hay un múltiplo de n que sólo tiene 0 y 1 en su expansión decimal.

Solución::

- Sea n un número entero positivo.
- Considere los $n+1$ enteros $1, 11, 111, \ldots, 11\ldots1$ (donde el último entero en esta lista es el entero con $n+1$ 1s en su expansión decimal).
- Tenga en cuenta que hay n residuos posibles cuando un número entero se divide por n.

Ejemplo 4

Ejemplo 4

Demuestre que para cada entero n hay un múltiplo de n que sólo tiene 0 y 1 en su expansión decimal.

Solución::

- Sea n un número entero positivo.
- Considere los $n+1$ enteros $1, 11, 111, \ldots, 11\ldots1$ (donde el último entero en esta lista es el entero con $n+1$ 1s en su expansión decimal).
- Tenga en cuenta que hay n residuos posibles cuando un número entero se divide por n.
- Debido a que hay $n+1$ números enteros en esta lista, por el principio del casillero debe haber dos con el mismo resto cuando se divide por n.

Ejemplo 4

Demuestre que para cada entero n hay un múltiplo de n que sólo tiene 0 y 1 en su expansión decimal.

Solución::

- Sea n un número entero positivo.
- Considere los $n+1$ enteros $1, 11, 111, \ldots, 11\ldots1$ (donde el último entero en esta lista es el entero con $n+1$ 1s en su expansión decimal).
- Tenga en cuenta que hay n residuos posibles cuando un número entero se divide por n.
- Debido a que hay $n+1$ números enteros en esta lista, por el principio del casillero debe haber dos con el mismo resto cuando se divide por n.
- El mayor de estos enteros menos el menor es un múltiplo de n, que tiene una expansión decimal que consta completamente de 0 y 1.

El Principio Generalizado del Casillero I

- El principio del casillero establece que debe haber al menos dos objetos en la misma caja cuando hay más objetos que cajas.

El Principio Generalizado del Casillero I

- Sin embargo, se puede decir aún más cuando el número de objetos excede un múltiplo del número de cajas.

El Principio Generalizado del Casillero I

- Por ejemplo, entre cualquier conjunto de 21 dígitos decimales debe haber 3 que sean iguales.

El Principio Generalizado del Casillero I

- Esto se debe a que cuando 21 objetos se distribuyen en 10 cajas, una caja debe tener más de 2 objetos.

El Principio Generalizado del Casillero II

Teorema 2

EL PRINCIPIO GENERALIZADO DEL CASILLERO Si N objetos se colocan en k cajas, entonces hay al menos una caja que contiene al menos $\lceil N/k \rceil$ objetos.

Teorema 2

EL PRINCIPIO GENERALIZADO DEL CASILLERO Si N objetos se colocan en k cajas, entonces hay al menos una caja que contiene al menos $\lceil N/k \rceil$ objetos.

Demostración:

- Usaremos una prueba por contraposición.

Teorema 2

EL PRINCIPIO GENERALIZADO DEL CASILLERO Si N objetos se colocan en k cajas, entonces hay al menos una caja que contiene al menos $\lceil N/k \rceil$ objetos.

Demostración:

- Usaremos una prueba por contraposición.
- Suponga que ninguna de las cajas contiene más de $\lceil N/k \rceil - 1$ objetos.

El Principio Generalizado del Casillero II

Teorema 2

EL PRINCIPIO GENERALIZADO DEL CASILLERO Si N objetos se colocan en k cajas, entonces hay al menos una caja que contiene al menos $\lceil N/k \rceil$ objetos.

Demostración:

- Usaremos una prueba por contraposición.
- Suponga que ninguna de las cajas contiene más de $\lceil N/k \rceil - 1$ objetos.
- Entonces, el número total de objetos es como máximo

$$k\left(\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1\right) < k\left(\left(\frac{N}{k} + 1\right) - 1\right) = N$$

El Principio Generalizado del Casillero II

Teorema 2

EL PRINCIPIO GENERALIZADO DEL CASILLERO Si N objetos se colocan en k cajas, entonces hay al menos una caja que contiene al menos $\lceil N/k \rceil$ objetos.

Demostración:

- Usaremos una prueba por contraposición.
- Suponga que ninguna de las cajas contiene más de $\lceil N/k \rceil - 1$ objetos.
- Entonces, el número total de objetos es como máximo

$$k\left(\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1\right) < k\left(\left(\frac{N}{k} + 1\right) - 1\right) = N$$

- donde se ha utilizado la desigualdad $\lceil N/k \rceil < (N/k) + 1$.

El Principio Generalizado del Casillero II

Teorema 2

EL PRINCIPIO GENERALIZADO DEL CASILLERO Si N objetos se colocan en k cajas, entonces hay al menos una caja que contiene al menos $\lceil N/k \rceil$ objetos.

Demostración:

- Usaremos una prueba por contraposición.
- Suponga que ninguna de las cajas contiene más de $\lceil N/k \rceil - 1$ objetos.
- Entonces, el número total de objetos es como máximo

$$k\left(\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1\right) < k\left(\left(\frac{N}{k} + 1\right) - 1\right) = N$$

- donde se ha utilizado la desigualdad $\lceil N/k \rceil < (N/k) + 1$.
- Por tanto, el número total de objetos es menor que N.

Teorema 2

EL PRINCIPIO GENERALIZADO DEL CASILLERO Si N objetos se colocan en k cajas, entonces hay al menos una caja que contiene al menos $\lceil N/k \rceil$ objetos.

Demostración:

- Usaremos una prueba por contraposición.
- Suponga que ninguna de las cajas contiene más de $\lceil N/k \rceil - 1$ objetos.
- Entonces, el número total de objetos es como máximo

$$k\left(\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1\right) < k\left(\left(\frac{N}{k} + 1\right) - 1\right) = N$$

- donde se ha utilizado la desigualdad $\lceil N/k \rceil < (N/k) + 1$.
- Por tanto, el número total de objetos es menor que N.
- Esto completa la demostración por contraposición.

El Principio Generalizado del Casillero III

- Un tipo de problema común pide el número mínimo de objetos de modo que al menos r de estos objetos debe estar en una de las k cajas, cuando estos objetos se distribuyen entre las cajas.

El Principio Generalizado del Casillero III

- Si tenemos N objetos, el principio generalizado del casillero nos dice que debe haber al menos r objetos en una de las cajas siempre que $\lceil N/k \rceil \geq r$.

El Principio Generalizado del Casillero III

- El número entero más pequeño N con $N/k > r - 1$, es decir, $N = k(r-1)+1$, es el número entero más pequeño que satisface la desigualdad $\lceil N/k \rceil \geq r$.

El Principio Generalizado del Casillero III

- ¿Podría ser suficiente un valor menor de N?

El Principio Generalizado del Casillero III

- La respuesta es no, porque si tuviéramos $k(r-1)$ objetos, podríamos poner $r-1$ de ellos en cada una de las k cajas y ninguna caja tendría al menos r objetos.

El Principio Generalizado del Casillero IV

- Al pensar en problemas de este tipo, es útil considerar cómo puede evitar tener al menos r objetos en una de las cajas a medida que agrega objetos sucesivos.

El Principio Generalizado del Casillero IV

- Para evitar agregar un objeto r-ésimo a cualquier caja, eventualmente terminará con $r - 1$ objetos en cada caja.

El Principio Generalizado del Casillero IV

- No hay forma de agregar el siguiente objeto sin poner un objeto r-ésimo en esa caja.

Ejemplo 5

Ejemplo 5

Entre 100 personas hay al menos $\lceil 100/12 \rceil = 9$ que nacieron en el mismo mes. $\square$

Ejemplo 6

Ejemplo 6

¿Cuál es el número mínimo de estudiantes requeridos en una clase de matemáticas discretas para asegurarse de que al menos seis recibirán la misma calificación, si hay cinco calificaciones posibles, A, B, C, D y F?

Ejemplo 6

¿Cuál es el número mínimo de estudiantes requeridos en una clase de matemáticas discretas para asegurarse de que al menos seis recibirán la misma calificación, si hay cinco calificaciones posibles, A, B, C, D y F?

Solución:

- El número mínimo de estudiantes necesario para garantizar que al menos seis estudiantes reciban la misma calificación es el número entero más pequeño N tal que $\lceil N/5 \rceil = 6$.

Ejemplo 6

¿Cuál es el número mínimo de estudiantes requeridos en una clase de matemáticas discretas para asegurarse de que al menos seis recibirán la misma calificación, si hay cinco calificaciones posibles, A, B, C, D y F?

Solución:

- El número mínimo de estudiantes necesario para garantizar que al menos seis estudiantes reciban la misma calificación es el número entero más pequeño N tal que $\lceil N/5 \rceil = 6$.
- El número entero más pequeño es $N = 5 \cdot 5 + 1 = 26$.

Ejemplo 6

Ejemplo 6

¿Cuál es el número mínimo de estudiantes requeridos en una clase de matemáticas discretas para asegurarse de que al menos seis recibirán la misma calificación, si hay cinco calificaciones posibles, A, B, C, D y F?

Solución:

- El número mínimo de estudiantes necesario para garantizar que al menos seis estudiantes reciban la misma calificación es el número entero más pequeño N tal que $\lceil N/5 \rceil = 6$.
- El número entero más pequeño es $N = 5 \cdot 5 + 1 = 26$.
- Si se tienen sólo 25 estudiantes, es posible que haya cinco que hayan recibido cada calificación, de modo que no haya seis estudiantes que hayan recibido la misma calificación.

Ejemplo 6

¿Cuál es el número mínimo de estudiantes requeridos en una clase de matemáticas discretas para asegurarse de que al menos seis recibirán la misma calificación, si hay cinco calificaciones posibles, A, B, C, D y F?

Solución:

- El número mínimo de estudiantes necesario para garantizar que al menos seis estudiantes reciban la misma calificación es el número entero más pequeño N tal que $\lceil N/5 \rceil = 6$.
- El número entero más pequeño es $N = 5 \cdot 5 + 1 = 26$.
- Si se tienen sólo 25 estudiantes, es posible que haya cinco que hayan recibido cada calificación, de modo que no haya seis estudiantes que hayan recibido la misma calificación.
- Por lo tanto, 26 es el número mínimo de estudiantes necesarios para garantizar que al menos seis estudiantes reciban la misma calificación.

Ejemplo 7

1. ¿Cuántas cartas deben seleccionarse de una baraja estándar de 52 cartas para garantizar que se seleccionen al menos tres cartas de la misma figura?
2. ¿Cuántos deben seleccionarse de una baraja estándar de 52 cartas para garantizar que se seleccionen al menos tres corazones?

Ejemplo 7

1. ¿Cuántas cartas deben seleccionarse de una baraja estándar de 52 cartas para garantizar que se seleccionen al menos tres cartas de la misma figura?
2. ¿Cuántos deben seleccionarse de una baraja estándar de 52 cartas para garantizar que se seleccionen al menos tres corazones?

Solución:

1.
   - Suponga que hay cuatro casillas, una para cada figura, y cuando se seleccionan las cartas, se colocan en la casilla reservada para las cartas de esa figura.

Ejemplo 7

1. ¿Cuántas cartas deben seleccionarse de una baraja estándar de 52 cartas para garantizar que se seleccionen al menos tres cartas de la misma figura?
2. ¿Cuántos deben seleccionarse de una baraja estándar de 52 cartas para garantizar que se seleccionen al menos tres corazones?

Solución:

1.
   - Suponga que hay cuatro casillas, una para cada figura, y cuando se seleccionan las cartas, se colocan en la casilla reservada para las cartas de esa figura.
   - Usando el principio generalizado del casillero, vemos que si se seleccionan N cartas, hay al menos una caja que contiene al menos $\lceil N/4 \rceil$ cartas.

Ejemplo 7 II

- En consecuencia, sabemos que se seleccionan al menos tres cartas de una figura si $\lceil N/4 \rceil \geq 3$.

Ejemplo 7 II

- El número entero más pequeño N tal que $\lceil N/4 \rceil \geq 3$ es $N = 4 \cdot 2 + 1 = 9$, entonces nueve cartas son suficientes.

Ejemplo 7 II

- Tenga en cuenta que si se seleccionan ocho cartas, es posible tener dos cartas de cada figura, por lo que se necesitan más de ocho cartas.

Ejemplo 7 II

- En consecuencia, se deben seleccionar nueve cartas para garantizar que se elijan al menos tres cartas de una misma figura.

Ejemplo 7 II

- Una buena forma de pensar en esto es tener en cuenta que después de elegir la octava carta, no hay forma de evitar tener una tercera carta de alguna figura.

Ejemplo 7 III

2.

- No utilizamos el principio generalizado del casillero para responder a esta pregunta, porque queremos asegurarnos de que haya tres corazones, no solo tres cartas de una figura.

Ejemplo 7 III

2.

- Tenga en cuenta que, en el peor de los casos, podemos seleccionar todos los tréboles, diamantes y espadas, 39 cartas en total, antes de seleccionar un solo corazón.

Ejemplo 7 III

2

- Las siguientes tres cartas serán todas de corazones, por lo que es posible que debamos seleccionar 42 cartas para obtener tres corazones.

□

Ejemplo 8

Ejemplo 8

¿Cuál es la menor cantidad de códigos de área necesarios para garantizar que a los 25 millones de teléfonos de un estado se les puedan asignar números de teléfono distintos de 10 dígitos? (Suponga que los números de teléfono tienen el formato NXX-NXX-XXXX, donde los primeros tres dígitos forman el código de área, N representa un dígito del 2 al 9 inclusive, y X representa cualquier dígito).

Ejemplo 8

¿Cuál es la menor cantidad de códigos de área necesarios para garantizar que a los 25 millones de teléfonos de un estado se les puedan asignar números de teléfono distintos de 10 dígitos? (Suponga que los números de teléfono tienen el formato NXX-NXX-XXXX, donde los primeros tres dígitos forman el código de área, N representa un dígito del 2 al 9 inclusive, y X representa cualquier dígito).

Solución:

- Hay ocho millones de números de teléfono diferentes con el formato NXX-XXXX.

Ejemplo 8

Ejemplo 8

¿Cuál es la menor cantidad de códigos de área necesarios para garantizar que a los 25 millones de teléfonos de un estado se les puedan asignar números de teléfono distintos de 10 dígitos? (Suponga que los números de teléfono tienen el formato NXX-NXX-XXXX, donde los primeros tres dígitos forman el código de área, N representa un dígito del 2 al 9 inclusive, y X representa cualquier dígito).

Solución:

- Hay ocho millones de números de teléfono diferentes con el formato NXX-XXXX.
- Por lo tanto, según el principio generalizado del casillero, entre 25 millones de teléfonos, al menos $\lceil 25,000,000/8,000,000 \rceil = 4$ de ellos deben tener números de teléfono idénticos.

Ejemplo 8

Ejemplo 8

¿Cuál es la menor cantidad de códigos de área necesarios para garantizar que a los 25 millones de teléfonos de un estado se les puedan asignar números de teléfono distintos de 10 dígitos? (Suponga que los números de teléfono tienen el formato NXX-NXX-XXXX, donde los primeros tres dígitos forman el código de área, N representa un dígito del 2 al 9 inclusive, y X representa cualquier dígito).

Solución:

- Hay ocho millones de números de teléfono diferentes con el formato NXX-XXXX.
- Por lo tanto, según el principio generalizado del casillero, entre 25 millones de teléfonos, al menos $\lceil 25,000,000/8,000,000 \rceil = 4$ de ellos deben tener números de teléfono idénticos.
- Por lo tanto, se requieren al menos cuatro códigos de área para garantizar que todos los números de 10 dígitos sean diferentes.

Ejemplo 9 I

Este ejemplo aunque no es una aplicación del principio generalizado del casillero, hace uso de principios similares.

Ejemplo 9

- Suponga que un laboratorio de ciencias de la computación tiene 15 estaciones de trabajo y 10 servidores.

Ejemplo 9 I

Este ejemplo aunque no es una aplicación del principio generalizado del casillero, hace uso de principios similares.

Ejemplo 9

- Suponga que un laboratorio de ciencias de la computación tiene 15 estaciones de trabajo y 10 servidores.
- Se puede utilizar un cable para conectar directamente una estación de trabajo a un servidor.

Ejemplo 9 I

Este ejemplo aunque no es una aplicación del principio generalizado del casillero, hace uso de principios similares.

Ejemplo 9

- Suponga que un laboratorio de ciencias de la computación tiene 15 estaciones de trabajo y 10 servidores.
- Se puede utilizar un cable para conectar directamente una estación de trabajo a un servidor.
- Para cada servidor, solo una conexión directa a ese servidor puede estar activa en cualquier momento.

Ejemplo 9 I

Este ejemplo aunque no es una aplicación del principio generalizado del casillero, hace uso de principios similares.

Ejemplo 9

- Suponga que un laboratorio de ciencias de la computación tiene 15 estaciones de trabajo y 10 servidores.
- Se puede utilizar un cable para conectar directamente una estación de trabajo a un servidor.
- Para cada servidor, solo una conexión directa a ese servidor puede estar activa en cualquier momento.
- Queremos garantizar que en cualquier momento cualquier conjunto de 10 o menos estaciones de trabajo pueda acceder simultáneamente a diferentes servidores a través de conexiones directas.

Ejemplo 9 I

Este ejemplo aunque no es una aplicación del principio generalizado del casillero, hace uso de principios similares.

Ejemplo 9

- Suponga que un laboratorio de ciencias de la computación tiene 15 estaciones de trabajo y 10 servidores.
- Se puede utilizar un cable para conectar directamente una estación de trabajo a un servidor.
- Para cada servidor, solo una conexión directa a ese servidor puede estar activa en cualquier momento.
- Queremos garantizar que en cualquier momento cualquier conjunto de 10 o menos estaciones de trabajo pueda acceder simultáneamente a diferentes servidores a través de conexiones directas.
- Aunque podríamos hacer esto conectando cada estación de trabajo directamente a cada servidor (usando 150 conexiones).

Este ejemplo aunque no es una aplicación del principio generalizado del casillero, hace uso de principios similares.

Ejemplo 9

- Suponga que un laboratorio de ciencias de la computación tiene 15 estaciones de trabajo y 10 servidores.
- Se puede utilizar un cable para conectar directamente una estación de trabajo a un servidor.
- Para cada servidor, solo una conexión directa a ese servidor puede estar activa en cualquier momento.
- Queremos garantizar que en cualquier momento cualquier conjunto de 10 o menos estaciones de trabajo pueda acceder simultáneamente a diferentes servidores a través de conexiones directas.
- Aunque podríamos hacer esto conectando cada estación de trabajo directamente a cada servidor (usando 150 conexiones).
- ¿Cuál es la cantidad mínima de conexiones directas necesarias para lograr este objetivo?

Ejemplo 9 II

Solución:

- Supongamos que etiquetamos las estaciones de trabajo $W_1, W_2, \ldots, W_{15}$ y los servidores $S_1, S_2, \ldots, S_{10}$.

Ejemplo 9 II

Solución:

- Supongamos que etiquetamos las estaciones de trabajo $W_1, W_2, \ldots, W_{15}$ y los servidores $S_1, S_2, \ldots, S_{10}$.
- Primero, nos gustaría encontrar una manera de que haya menos de 150 conexiones directas entre estaciones de trabajo y servidores para lograr nuestro objetivo.

Ejemplo 9 II

Solución:

- Supongamos que etiquetamos las estaciones de trabajo $W_1, W_2, \ldots, W_{15}$ y los servidores $S_1, S_2, \ldots, S_{10}$.
- Primero, nos gustaría encontrar una manera de que haya menos de 150 conexiones directas entre estaciones de trabajo y servidores para lograr nuestro objetivo.
- Un enfoque prometedor es conectar directamente W_k a S_k para $k = 1, 2, \ldots, 10$ y luego conectar cada uno de $W_{11}, W_{12}, W_{13}, W_{14}$ y W_{15} a los 10 servidores.

Ejemplo 9 II

Solución:

- Supongamos que etiquetamos las estaciones de trabajo $W_1, W_2, \ldots, W_{15}$ y los servidores $S_1, S_2, \ldots, S_{10}$.
- Primero, nos gustaría encontrar una manera de que haya menos de 150 conexiones directas entre estaciones de trabajo y servidores para lograr nuestro objetivo.
- Un enfoque prometedor es conectar directamente W_k a S_k para $k = 1, 2, \ldots, 10$ y luego conectar cada uno de $W_{11}, W_{12}, W_{13}, W_{14}$ y W_{15} a los 10 servidores.
- Esto nos da un total de $10 + 5 \cdot 10 = 60$ conexiones directas.

Ejemplo 9 II

Solución:

- Supongamos que etiquetamos las estaciones de trabajo $W_1, W_2, \ldots, W_{15}$ y los servidores $S_1, S_2, \ldots, S_{10}$.
- Primero, nos gustaría encontrar una manera de que haya menos de 150 conexiones directas entre estaciones de trabajo y servidores para lograr nuestro objetivo.
- Un enfoque prometedor es conectar directamente W_k a S_k para $k = 1, 2, \ldots, 10$ y luego conectar cada uno de $W_{11}, W_{12}, W_{13}, W_{14}$ y W_{15} a los 10 servidores.
- Esto nos da un total de $10 + 5 \cdot 10 = 60$ conexiones directas.
- Necesitamos determinar si con esta configuración cualquier conjunto de 10 o menos estaciones de trabajo puede acceder simultáneamente a diferentes servidores.

Ejemplo 9 II

Solución:

- Supongamos que etiquetamos las estaciones de trabajo $W_1, W_2, \ldots, W_{15}$ y los servidores $S_1, S_2, \ldots, S_{10}$.
- Primero, nos gustaría encontrar una manera de que haya menos de 150 conexiones directas entre estaciones de trabajo y servidores para lograr nuestro objetivo.
- Un enfoque prometedor es conectar directamente W_k a S_k para $k = 1, 2, \ldots, 10$ y luego conectar cada uno de $W_{11}, W_{12}, W_{13}, W_{14}$ y W_{15} a los 10 servidores.
- Esto nos da un total de $10 + 5 \cdot 10 = 60$ conexiones directas.
- Necesitamos determinar si con esta configuración cualquier conjunto de 10 o menos estaciones de trabajo puede acceder simultáneamente a diferentes servidores.
- Observamos que si la estación de trabajo W_j está incluida con $1 \leq j \leq 10$, puede acceder al servidor S_j, y para cada estación de trabajo W_k con $k \geq 11$ incluida, debe haber una estación de trabajo W_j correspondiente con $1 \leq j \leq 10$ no incluida, por lo que W_k puede acceder al servidor S_j.

Ejemplo 9 III

- Esto se debe a que hay al menos tantos servidores disponibles S_j como estaciones de trabajo W_j con $1 \leq j \leq 10$ no incluidas.

Ejemplo 9 III

- Esto se debe a que hay al menos tantos servidores disponibles S_j como estaciones de trabajo W_j con $1 \leq j \leq 10$ no incluidas.
- Por lo tanto, cualquier conjunto de 10 o menos estaciones de trabajo puede acceder simultáneamente a diferentes servidores.

Ejemplo 9 III

- Esto se debe a que hay al menos tantos servidores disponibles S_j como estaciones de trabajo W_j con $1 \leq j \leq 10$ no incluidas.
- Por lo tanto, cualquier conjunto de 10 o menos estaciones de trabajo puede acceder simultáneamente a diferentes servidores.
- Pero, ¿podemos utilizar menos de 60 conexiones directas?

Ejemplo 9 III

- Esto se debe a que hay al menos tantos servidores disponibles S_j como estaciones de trabajo W_j con $1 \leq j \leq 10$ no incluidas.
- Por lo tanto, cualquier conjunto de 10 o menos estaciones de trabajo puede acceder simultáneamente a diferentes servidores.
- Pero, ¿podemos utilizar menos de 60 conexiones directas?
- Suponga que hay menos de 60 conexiones directas entre estaciones de trabajo y servidores.

Ejemplo 9 III

- Esto se debe a que hay al menos tantos servidores disponibles S_j como estaciones de trabajo W_j con $1 \leq j \leq 10$ no incluidas.
- Por lo tanto, cualquier conjunto de 10 o menos estaciones de trabajo puede acceder simultáneamente a diferentes servidores.
- Pero, ¿podemos utilizar menos de 60 conexiones directas?
- Suponga que hay menos de 60 conexiones directas entre estaciones de trabajo y servidores.
- Entonces, algún servidor se conectaría a un máximo de $\lfloor 59/10 \rfloor = 5$ estaciones de trabajo.

Ejemplo 9 III

- Esto se debe a que hay al menos tantos servidores disponibles S_j como estaciones de trabajo W_j con $1 \leq j \leq 10$ no incluidas.
- Por lo tanto, cualquier conjunto de 10 o menos estaciones de trabajo puede acceder simultáneamente a diferentes servidores.
- Pero, ¿podemos utilizar menos de 60 conexiones directas?
- Suponga que hay menos de 60 conexiones directas entre estaciones de trabajo y servidores.
- Entonces, algún servidor se conectaría a un máximo de $\lfloor 59/10 \rfloor = 5$ estaciones de trabajo.
- Si todos los servidores estuvieran conectados a al menos seis estaciones de trabajo, habría al menos 6 x 10 $=$ 60 conexiones directas.

Ejemplo 9 III

- Esto se debe a que hay al menos tantos servidores disponibles S_j como estaciones de trabajo W_j con $1 \leq j \leq 10$ no incluidas.
- Por lo tanto, cualquier conjunto de 10 o menos estaciones de trabajo puede acceder simultáneamente a diferentes servidores.
- Pero, ¿podemos utilizar menos de 60 conexiones directas?
- Suponga que hay menos de 60 conexiones directas entre estaciones de trabajo y servidores.
- Entonces, algún servidor se conectaría a un máximo de $\lfloor 59/10 \rfloor = 5$ estaciones de trabajo.
- Si todos los servidores estuvieran conectados a al menos seis estaciones de trabajo, habría al menos 6 x 10 $=$ 60 conexiones directas.
- Esto significa que los nueve servidores restantes no son suficientes para que las otras 10 o más estaciones de trabajo accedan simultáneamente a diferentes servidores.

Ejemplo 9 III

- Esto se debe a que hay al menos tantos servidores disponibles S_j como estaciones de trabajo W_j con $1 \leq j \leq 10$ no incluidas.
- Por lo tanto, cualquier conjunto de 10 o menos estaciones de trabajo puede acceder simultáneamente a diferentes servidores.
- Pero, ¿podemos utilizar menos de 60 conexiones directas?
- Suponga que hay menos de 60 conexiones directas entre estaciones de trabajo y servidores.
- Entonces, algún servidor se conectaría a un máximo de $\lfloor 59/10 \rfloor = 5$ estaciones de trabajo.
- Si todos los servidores estuvieran conectados a al menos seis estaciones de trabajo, habría al menos 6 x 10 $=$ 60 conexiones directas.
- Esto significa que los nueve servidores restantes no son suficientes para que las otras 10 o más estaciones de trabajo accedan simultáneamente a diferentes servidores.
- En consecuencia, se necesitan al menos 60 conexiones directas.

Ejemplo 9 III

- Esto se debe a que hay al menos tantos servidores disponibles S_j como estaciones de trabajo W_j con $1 \leq j \leq 10$ no incluidas.
- Por lo tanto, cualquier conjunto de 10 o menos estaciones de trabajo puede acceder simultáneamente a diferentes servidores.
- Pero, ¿podemos utilizar menos de 60 conexiones directas?
- Suponga que hay menos de 60 conexiones directas entre estaciones de trabajo y servidores.
- Entonces, algún servidor se conectaría a un máximo de $\lfloor 59/10 \rfloor = 5$ estaciones de trabajo.
- Si todos los servidores estuvieran conectados a al menos seis estaciones de trabajo, habría al menos 6 x 10 $=$ 60 conexiones directas.
- Esto significa que los nueve servidores restantes no son suficientes para que las otras 10 o más estaciones de trabajo accedan simultáneamente a diferentes servidores.
- En consecuencia, se necesitan al menos 60 conexiones directas.
- De ello se deduce que 60 es la respuesta.

Ejercicios I

1. ¿Cuántos números deben seleccionarse del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ para garantizar que al menos un par de estos números sumen 7?
2. Muestre que en un grupo de 10 personas (donde dos personas son amigos o enemigos), hay tres amigos mutuos o cuatro enemigos mutuos, y hay tres enemigos mutuos o cuatro amigos mutuos.
3. Muestre que hay al menos seis personas en California (población: 39 millones) con las mismas tres iniciales que nacieron el mismo día del año (pero no necesariamente en el mismo año). Suponga que todos tienen tres iniciales.
4. Hay 38 períodos de tiempo diferentes durante los cuales se pueden programar las clases en una universidad. Si hay 677 cursos diferentes, ¿cuántas salones diferentes se necesitarán?

Ejercicios II

5. Una red de computadoras consta de seis computadoras. Cada computadora está conectada directamente al menos a una de las otras computadoras. Muestre que hay al menos dos computadoras en la red que están conectadas directamente a la misma cantidad de otras computadoras.
6. Hay 51 casas en una calle. Cada casa tiene una dirección entre 1000 y 1099, inclusive. Muestre que al menos dos casas tienen direcciones que son números enteros consecutivos.